**UNVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS**

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

E.A.P DE MATEMÁTICA

# Polar de un germen de curva irreducible de género uno

TESIS

para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Mauro Fernando Hernandez Iglesias

**Lima – Perú**

**2012**

# Polar de un germen de curva irreducible de género uno

Mauro Fernando Hernández Iglesias

5 de noviembre de 2012

A mi bisabuela Hipólita Román García.

# Agradecimientos

**RESUMEN**

Sea $f$ una curva plana irreducible con semigrupo $\langle n, m \rangle$, denotemos por $K(n,m)$ el conjunto de curvas irreducibles topológicamente equivalentes a $f$, es sabido que el tipo topológico de la polar de una curva $g$, definida por $P(g) = ag_x + bg_y$ no es constante en el conjunto $K(n,m)$ ver Ejemplo 1, o sea el tipo topológico de la polar no es un invariante topológico de la curva sino un invariente analítico.

Sin embargo, Casas Alvero demostró que al menos genéricamente el tipo topológico de la polar es constante en $K(n,m)$ y su topología es determinada a partir de $n$ y $m$.

Nosotros daremos una prueba particular de esa afirmación, describiendo además de modo explicito un abierto $U$ en $K(n,m)$ donde la topología de la polar es constante y bien determinada; además veremos el comportamiento de la polar de algunas curvas que no estan en el conjunto $U$.

# INTRODUCCIÓN

El objetivo del presente trabajo es dar una descripción particular, de la topología de la polar genérica de una curva genérica irreducible de género uno, a partir de la topológica de curvas no degeneradas la cual se obtiene completamente a partir de su polígono de Newton.

El tipo topológico de la polar es un problema en abierto desde la época de Max Noether, en un principio los geómetras italianos pensaban que el tipo topológico de la polar era un invariante topológico de la curva, lo cual se sabe ahora que no es cierto, ver el Ejemplo de F. Pham (1).
La máxima información de la polar que se puede obtener sólo a partir del tipo topológico de la curva es dada en el Teorema de Merle [M], donde se describe los índices de intersección de una curva irreducible con las componentes irreducibles de su polar, divididos con la multiplicidad de la curva, a dichos valores se les da el nombre de cocientes polares.

Si bien los antiguos italianos estaban equivocados, su afirmación no era totalmente falsa, pues dicha afirmación es cierta de modo genérico en una determinada clase de equisingularidad, resultado que fué probado por Casas Alvero.

El presente trabajo está inspirado en el artículo de Casas [C1], donde prueba su resultado para el caso de curvas irreducibles con semigrupo $\langle n, m\rangle$ el cual será denotado por $K(n, m)$. Para provar el resultado

Casas ultiliza la representación paramétrica (de Puiseux) de una curva de género uno. Nosotros daremos la prueba a partir de la representación implicita de una curva de género uno.

Además daremos la descripción explicita de un abierto de Zariski $U$ en $K(n, m)$ donde las curvas tienen su polar con tipo topológico constante.
Con ayuda del software Maple damos una rutina( *rpolar*), que determina la topología de la polar de una curva en $K(n, m)$, dada en forma paramétrica y con un determinado orden de truncamiento.

Una de las características que tienen las curvas del conjunto $U$ es que sus polares tienen componentes irreducibles de género uno o suaves, justamente una conjetura que se tenía era si todas las curvas en $K(n, m)$ tienen sus polares con componentes de género menor o igual a uno. Daremos ejemplos de curvas en $K(n, m) \setminus U$ que tienen su polar con ramas de género 2.

# Notaciones:

$\mathbb{C}$: El cuerpo de los números complejos.
$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$.
$I\!R$: El cuerpo de los números reales.
$\mathbb{C}\{x, y\}$: El anillo de las series convergentes en el origen.
$\mathbb{C}[[x, y]]$: El anillo de las series formales en el origen.
$o(f)$: Orden o multiplicidad de $f$ en el origen.
$o_p(f)$: Orden o multiplicidad de $f$ en el punto $p$.
$I(f, g)$: Indice de intersección de $f$ y $g$ en el origen.
$I_p(f, g)$: Indice de intersección de $f$ y $g$ en punto $p$.
$PN(f)$: Polígono de Newton de la curva $f$.
$[x]$: Mayor entero menor o igual a $x$.

# Índice general

# Capítulo 1

# Preliminares

## 1.1. Germenes de curvas análiticas planas

Sea $\mathbb{C}\{x, y\}$ el anillo de las series de potencias convergentes en dos variables. Consideremos las siguientes relaciones de equivalencia en el ideal maximal $\mathcal{M} = \langle x, y \rangle$ de $\mathbb{C}\{x, y\}$:

- La relación de asociado , en que $f$ y $g$ son equivalentes si existe una unidad $u$ en $\mathbb{C}\{x, y\}$, tal que $g = uf$. Denotaremos por $(f)$ a la clase de equivalencia de $f$ según esta relación .

- La $\mathcal{K}$ equivalencia o equivalencia analítica, en que $f \sim_{\mathcal{K}} g$ si existe un automorfismo $\phi$ y una unidad $u$ de $\mathbb{C}\{x, y\}$ tal que $f = u\phi(g)$.

**Definición 1.** Una clase de equivalencia $(f)$, donde $f \in \mathcal{M}$ y además $f$ no tiene factores múltiples será llamada germen de curva analítica en el origen de $\mathbb{C}^2$, o simplemente curva plana. La serie $f$ o cualquier otro representante de la clase, será llamada de ecuación de la curva.

Por simplicidad usaremos indistintamente las notaciones $(f)$ y $f$.

**Observación 1.** El hecho de tomar la curva sin factores múltiples o sea *reduzida* nos permite identificar $(f)$ con el germen de curva $(f^{-1}(0), 0)$ en el origen de $\mathbb{C}^2$, dando una interpretación geométrica a esos objetos algebraicos.

Debido a que nuestros objetos de estudio son finitamente determinados, podemos hacer nuestros cálculos en el anillo de series de potencias formales $\mathbb{C}[[x, y]]$.

La $\mathcal{K}$-equivalencia induze una relación de equivalencia $\sim$ llamada de equivalencia analítica, en el conjunto de germenes de curvas analíticas planas, donde:

$$(f) \sim (g) \Leftrightarrow f \sim_{\mathcal{K}} g.$$

Sea $C$ una curva irreducible de multiplicidad $n$, regular en $y$ de orden $n$, el Teorema de preparación de Weierstrass permite hallar una curva $(f)$ $\mathcal{K}$-equivalente a $C$, donde $f$ es un polinomio de Weierstrass de grado $n$ en $y$.

En otras palabras si $f$ es una curva irreducible de multiplicidad $n$ regular en $y$ , entonces $f$ es analíticamente equivalente a:
$y^n + a_1 x y^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)y + a_n(x)$, donde $o(a_i(x)) \geq i$.

**Teorema 1.** Seja $f$ una curva irreducible de multiplidad $n$, regular en $y$ , entonces existe una parametrización de $(f)$ de la forma:

$$x = t^n, \;\; y = \varphi(t) = t^m + \sum_{i \geq 1} a_i t^{m+i}.$$

Considerando $w$ una raíz enésima de la unidad, tenemos que $\varphi_w(t) = \varphi(tw)$ también es una parametrización de $(f)$, además existe una unidad $u$ en $\mathbb{C}\{x, y\}$ tal que:

$$f = u \prod_{w^n=1} (y - \varphi_w(x^{\frac{1}{n}})).$$

**Prueba**. Ver [C2]

**Definición 2.** Seja $(f)$ una curva irreducible de orden $n$ regular en $y$ de orden $n$, las parametrizaciones $\{\varphi_w(t);\; w^n = 1\}$ obtenidas segun el Teorema anterior, son llamadas las parametrizaciones de Puiseux de la curva $(f)$.

## 1.2. Multiplicidad de intersección

Sea $f$ una curva irreducible con parametrización de Puiseux $(t^n, \varphi(t))$. Considerando $g \in \mathbb{C}\{x, y\}$ definimos la multiplicidad de intersección o intersección de $f$ y $g$ en el origen de $\mathbb{C}^2$ como:

$$I(f, g) = o_t(g(t^n, \varphi(t)).$$

Donde $o_t$ es el orden en $\mathbb{C}[[t]]$.

En el caso que $f$ y $g$ sean curvas reducidas se tiene que:

$$I(f,g) = \sum I(f_i, g),$$

donde los $f_i$ son las ramas o factores irreducibles de $f$.

Existe una fórmula debido a Halphen que permite determinar la multiplicidad de intersección en base a todas las parametrizaciones de ambas curvas.

Sean $C$ y $D$ curvas planas y consideremos un sistema de coordenadas locales $(x,y)$ de $\mathbb{C}^2$ en el origen, tal que $C = (f)$ $D = (g)$, donde $f$ y $g$ son polinomios de Weierstrass en $y$. Sean $f = f_1 f_2 \cdots f_r$ y $g = g_1 g_1 \cdots g_s$ la descomposiciones en factores irreducibles de $f$ y $g$ denotaremos por $(t^{n_k}, \varphi_{ki}(t))$ $i = 1 \cdots n_k$ las parametrizaciones de Puiseux de $f_k$, y por $(t^{m_l}, \psi_{l,j}(t))$, $j = 1, \cdots, m_l$ las parametrizaciones de Puiseux de $g_l$; por simplicicidad consideramos la notación

$$s_{ki} = \varphi_{ki}(x^{\frac{1}{n_k}}), \quad s'_{lj} = \psi_{lj}(x^{\frac{1}{m_l}}).$$

En las condiciones anteriores tenemos la siguiente fórmula.

La multiplicidad de intersección de $C$ y $D$ es dada por:

$$I(C,D) = \sum_{i,j,k,l} o_x(s_{ki} - s'_{lj}),$$

donde $o_x(s)$ denota el orden en $x$ de la serie de potencias $s$ con exponentes fraccionarios en $x$.

**Definición 3.** Seja $f$ una curva irreducible de multiplicidad $n$ y regular en $y$ de orden $n$, a partir de una parametrización de Puiseux:

$$x = t^n, \ \ y = \varphi(t) = \sum_{i \geq n} a_i t^i.$$

Definimos: $\beta_0 = e_0 = n$, $\beta_1 = \min\{i; a_i \neq 0 \ \ i \notin \langle e_0 \rangle\}$, $e_1 = \mathrm{mdc}\{\beta_0, \beta_1\}, \ldots, \beta_g = \min\{i; a_i \neq 0 \ \ i \notin \langle e_{g-1} \rangle\}$ , como $e_0 > e_1 > \cdots$, entonces existe $g$ tal que $e_g = 1$. Los valores $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_g$ son llamados los exponentes característicos de la curva $f$, y el valor $g$ es dicho el *género de la curva.*

## 1.3. Equisingularidad

Dos germenes de curvas planas $f$ y $g$ son dichos equisingulares, o topologicamente equivalentes, escribiendo $f \equiv g$, si existen abiertos $U$ y $V$ de $\mathbb{C}^2$ conteniendo el origen y un homeomorfismo $\varphi : U \to V$, tal que $\varphi(f^{-1}(0) \bigcap U) = g^{-1}(0) \bigcap V$.

Un resultado clásico debido a Zariski que caracteriza la equisingularidad de una curva es dado por el siguiente Teorema.

**Teorema 2.** Sean $f$ y $g$ dos germenes de curvas planas, se cumple:

• Si $f$ y $g$ son irreducibles, entonces $f \equiv g$ si y sólo si tienen los mismos exponentes caracteristicos.

• Si $f$ y $g$ son reducidos con factores irreducibles $\{f_i; 1 \leq i \leq n\}$ y $\{g_i; 1 \leq i \leq n\}$ respectivamente, entonces $f \equiv g$ si y sólo si $f_i$ y $g_i$ tienen los mismos exponentes caracteristicos para todo $i$, y además $I(f_i, f_j) = I(g_i, g_j)$ para todo $i, j$.

## 1.4. Semigrupo de valores de una curva irreducible

Sea $(f)$ una curva plana irreducible de multiplicidad $n$ regular en $y$ de orden $n$, consideremos el conjunto:

$$N_f = \{I(f, g); g \in \mathbb{C}\{x, y\}\}$$

El conjunto $N_f$ es un semigrupo de $\mathbb{N}$, el cual posee un sistema mínimo de generadores $v_0, v_1, \cdots, v_g$, donde $g$ es el género de la curva $f$.
Es frecuente usar la notación $N_f = \langle v_0, \cdots, v_g \rangle$ para representar el semigrupo por su sistema mínimo de generadores.

Zariski provó en [Z1], las siguientes relaciones entre los exponentes caraterísiticos y el sistema mímino de generadores de $N_f$.

$$v_0 = \beta_0, \;\; v_1 = \beta_1, \;\; v_i = n_{i-1}v_{i-1} - \beta_{i-1} + \beta_i,$$

donde $n_0 = n$, $n_i = \frac{e_{i-1}}{e_i}$, $1 \leq i \leq g$.

Por lo tanto el semigrupo $N_f$ y el conjunto de exponentes característicos de una curva irreducible $f$ se determinan mutuamente, lo que muestra que la equisingularidad de una curva irreducible es caracterizada, o bien por sus exponentes característicos o por el sistema mínimo de generadores del semigrupo $N_f$.

El semigrupo $N_f$ contiene todo número natural suficientemente grande, o sea existe un $c$ tal que $c-1 \notin N_f$ y $n \in N_f$ para todo $n \geq c$. El valor $c$ es llamado el *conductor del semigrupo $N_f$.*

**Observación 2.** En el caso particular de que $N_f = \langle n, m \rangle$ el conductor es: $(n-1)(m-1)$.

**Proposición 1.** Para el caso de curvas irreducibles de género uno con semigrupo $\langle n, m \rangle$ el siguiente conjunto $K(n,m)$ representa a menos equivalencia analítica todas las curvas irreducibles con semigrupo $\langle n, m \rangle$.

$$K(n,m) = \{x^n - y^n + \sum_{in+jm>nm} a_{i,j}x^i y^j\}.$$

**Prueba**. Ver ([C2])

## 1.5. Polígono de Newton de una curva plana

Sea $f = \sum_{(i,j)} a_{i,j}x^i y^j$ una curva plana. El soporte de $f$ denotado por $S(f)$ es definido como el conjunto:

$$\{(i,j); a_{i,j} \neq 0\}$$

La región de Newton de $f$ denotada por $N(f)$ es definida como la envolvente convexa de el conjunto:

$$\bigcup_{(i,j)\in S(f)} (i,j) + \mathbb{R}^2_+$$

El polígono de Newton de $f$ denotado por $PN(f)$ es definido como la unión de los lados compactos de el borde de la región $N(f)$.

**Observación 3.** El polígono de Newton de una curva $f$ es invariente por multiplicación por unidades, por lo tanto podemos definir el polígono de Newton de un germen de curva plana.

Sean $n, m$ coprimos consideremos las divisiones sucesivas dadas por el algoritmo de Euclides.

$$
\begin{aligned}
m &= hn + r_1 \\
n &= h_1 r_1 + r_2 \\
r_1 &= h_2 r_2 + r_3 \\
&\vdots \\
r_{s-2} &= h_{s-1} r_{s-1} + 1 \\
r_{s-1} &= h_s
\end{aligned}
$$

La expresión anterior la podemos expresar en fracciones continuas como:

$$\frac{m}{n} = [h, h_1, \cdots, h_s].$$

Considerando las fracciones continuas

$$\frac{p_i}{q_i} = [h, h_1, \cdots, h_i],$$

donde $\mathrm{mdc}\{p_i, q_i\} = 1$.

Definimos el siguiente conjunto:

$$B = \{(m - [\frac{(\rho+1)m}{n}], \rho); 0 \leq \rho \leq n-1\}$$

El siguiente resultado es debido a Casas Alvero.

**Teorema 3.** El polígono de Newton determinado por el conjunto $B$ tiene $[\frac{s+1}{2}]$ lados $l_j$, para $j \in \{0, \cdots, [\frac{s-1}{2}]\}$.

El lado $l_j$ tiene inclinación geométrica $\frac{q_{2j+1}}{p_{2j+1}}$, caso $j < \frac{s-1}{2}$, o $\frac{q_s - q_{s-1}}{p_s - p_{s-1}}$, caso $j = \frac{s-1}{2}$.
Además para $j < \frac{s-1}{2}$ los puntos del polígono de Newton sobre el lado $l_j$ son:

$P_{q_{2j}+\alpha q_{2j+1}-1} = (m - p_{2j}, q_{2j-1}) + \alpha(-p_{2j+1}, q_{2j+1})$, donde $\alpha \in \{0, \cdots, h_{2j+2}\}$.
En el caso que $s$ sea impar sobre el lado $l_{\frac{s-1}{2}}$ están apenas los puntos $(m - p_{s-1}, q_{s-1} - 1)$ y $(0, n-1)$.

**Prueba**. Ver ([C1]).

## 1.6. Curvas planas no degeneradas

Sea $f = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$ un germen de curva plana, $PN(f)$ su polígono de Newton, y $l$ un lado de $PN(f)$, denotaremos por $f_l$ el polinomio:

$$f_l = \sum_{(i,j) \in l} a_{i,j} x^i y^j.$$

**Definición 4.** Sea $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ una curva reduzida . Diremos de que $f$ es no degenerada o Newton no degenerada con respecto al sistema de coordenadas $(x, y)$, si para cada lado $l$ de $PN(f)$ el polinomio asociado $f_l$ no tiene puntos críticos fuera de las rectas $x = 0$ y $y = 0$.

Note que la propiedad de ser no degenerada es invariante por multiplicación por unidades. Por lo tanto decir de que $f$ es no degenerada es equivalente a decir que $(f)$ es no degenerada.

El siguiente Teorema será fundamental para nuestro trabajo.

**Teorema 4.** *Sean $f$ y $g$ dos series de potencias reducidas, tal que $PN(f) = PN(g)$. Si ambas curvas son no degeneradas entonces $f \equiv g$.*

**Prueba**. Ver ([BLP]).

El Teorema anterior nos dice de que le tipo topológico de una curva plana no degenerada es determinado por su polígono de Newton. Dicho tipo topológico será descrito en el Teorema (5)

Sea $C$ un germen de curva plana, una familia $(C^{(i)})_i$ es dicha una descomposición de $C$ si $C = \bigcup_i C^{(i)}$, donde $C^{(i)}$ no tiene componente en común con $C^{(j)}$ para $i \neq j$.

Representaremos por $\{\frac{a}{b}\}$ el polígono de Newton determinado por el segmento que une los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$.

El siguiente resultado es devido a Oka, y descrive la topología de una curva reduzida no degenerada.

**Teorema 5.** *Sea $C = f$ una curva plana y $(x, y)$ un sistema coordenado tal que el cono tangente de $f$ no contiene a la recta $x = 0$. Entonces existe una descomposición $C^{(i)}$ , $i = 1, \cdots, s$ de $f$, tal que denotando $m_i = I(C^{(i)}, y)$ y $n_i = I(C^{(i)}, x) = o(C^{(i)})$, se tiene que :*

- $PN(C^{(i)}) = \dfrac{m_i}{n_i}$.

- *Se $d_i = \frac{m_i}{n_i}$, entonces $1 \leq d_1 < d_2 < \cdots < d_s \leq \infty$ y $d_s = \infty$ si $C^{(s)} = (y)$.*

- *Además, si $C$ es no degenerada con respecto a $(x, y)$ tenemos de que $C^{(i)}$ tiene $r_i = \text{mcd}\{n_i, m_i\}$ componentes irreducibles $C_j^{(i)}$, con parametrizaciones:*
$$y^{\frac{n_i}{r_i}} - a_{i,j} x^{\frac{m_i}{n_i}} + \cdots, 1 \leq j \leq r_i$$

donde $a_{i,j} \neq a_{i,j'}$ para $j \neq j^{'}$.

**Observación 4.** El Teorema anterior nos dice que si $C = f$ es una curva plana que no posee a la recta $x$ en su cono tangente, propiedad que es verificada por ejemplo si $f$ es regular en $y$.

En estas condiciones tenemos que si $f$ es no degenerada con respecto al sistema $(x, y)$, entonces cada bloque $C^{(i)}$ de la descomposición dada en el Teorema anterior, corresponde a un lado $l_i = [(x_{i+1}, y_{i+1}), (x_i, y_i)]$ de su polígono de Newton $PN(f)$. Además denotando $m_i = x_i - x_{i+1}$ $n_i = y_{i+1} - y_i$ tenemos de que al lado $l_i$ corresponden $r_i$ componentes irreducibles $p_{i,1}, \cdots p_{i,r_i}$, donde $r_i = \text{mcd}\{m_i, n_i\}$, las cuales tienen par característico $(\frac{n_i}{r_i}, \frac{m_i}{r_i})$, y cada componente irreducible $p_{i,j}$ asociada al lado $l_i$ tiene parametrización de Puiseux:

$$y_{i,j} = c_{i,j} x^{\frac{m_i}{n_i}} + \cdots$$

donde $c_{i,j}^{n_i} \neq c_{i,j'}^{n_i}$ para $j \neq j^{'}$.

**Observación 5.** La observación anterior junto con la fórmula de Halpen me permite determinar los índices de intersección de las componentes irreducibles de una curva no degenerada, por tanto la topología de una curva no degenerada es determinanda completamente de su polígono de Newton.

## 1.7. Polar de una curva plana

Sea $f$ un germen de curva plana, definimos la polar de $f$ en la dirección $p = (a : b) \in \mathbb{P}^1$ como:

$$P_{a,b}(f) = af_x + bf_y,$$

En el caso de que $p \in U$ abierto de $\mathbb{P}^1$, diremos que es la polar genérica o polar de $f$. Se prueba que para $(a : b)$ en un abierto adecuado $P_{a,b}(f)$ resulta una curva reduzida, por tal motivo para nosotros la polar será siempre una curva reduzida (Ver [L]).

Los geometras italianos pensaban que el tipo topológico de la polar era invariante en una clase de equisingularidad. B. Segre observó que esto no es verdad en general. Existe un ejemplo bastante simple debido a F. Pham.

**Ejemplo 1.**

$$f_\lambda = y^3 - x^{11} + \lambda x^8 y.$$

Después de un cálculo se tiene que la polar asociada a :

- $\lambda = 0$ tiene dos ramas suaves con índice de intersección 5.

- $\lambda \neq 0$ tiene dos ramas suaves con índice de intersección 4.

## 1.8. Invariantes Polares

En esta sección trataremos una característica de la polar que es determinada apenas por el tipo topológico de la curva.

Sea $f$ un germen de curva irreducible com $o(f) = n$, y semigrupo de valores $N_f = \langle n, v_1, \cdots v_g \rangle$. Definiendo $e_i = \text{mdc}\{n, v_1, \cdots, v_i\}$, tenemos el siguiente resultado debido a Merle.

**Teorema 6.** Sea $P_x(f) = f_y$, entonces para cualquier componente irreducible $h$ de $f_y$ existe $i \in \{1, 2, \cdots, g\}$ tal que :

$$\frac{I(f,h)}{o(h)} = \frac{e_{i-1}}{n}.$$

Reciprocamente, para cada $i$ existe por lo menos una componente irreducible $h$ de $f_y$ para el cual se verifica la igualdad anterior.

**Prueba**. Ver[M].

Los cocientes $\frac{I(f,h)}{o(h)}$ son llamado cocientes polares de $f$ y fueron introducidos por Teissier para hipersuperficies.

Como mencionamos arriba en el Ejemplo de Pham, que el tipo topológico de la curva no determina el tipológico de la polar, mas a partir del Teorema de Merle, es posible determinar el tipo topológico de una curva irreducible a partir de su multiplicidad y de sus cocientes polares.

**Corolario 1.** Sea $f$ un gemen de curva plana irreducible, entonces la multiplicidad de $f$ y sus cocientes polares determinan su clase de equisingularidad.

## 1.9. Módulo de diferenciales

Sea $f$ una curva irreducible en $\mathbb{C}\{x, y\}$ y $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{x, y\}/\langle f \rangle$ el anillo local de $f$. El *módulo de diferenciales* asociado a $f$ es el$\mathcal{O}$-módulo

$$\mathcal{O}d\mathcal{O} = \frac{\mathcal{O}^2}{< f_x e_1 + f_y e_2 >},$$

donde $\{e_1, e_2\}$ es uma base de $\mathcal{O}^2$. Denotamos por $\mathcal{T}$ el submódulo de torción de $\mathcal{O}d\mathcal{O}$.

Podemos asociar un valor a una diferencial $w = h_1dx + h_2dy$ en $\mathcal{O}d\mathcal{O} \setminus \mathcal{T}$ a partir da valorización $v = v_f$ em $\mathbb{C}[[t]]$, dada por la multiplicidad en $t$, y una parametrización de Puiseux $(t^n, \varphi(t))$ de $f$, del modo siguiente:

$$\nu(w) = v\left(nh_1(t^n, \varphi(t))t^{n-1} + h_2(t^n, \varphi(t))\varphi'(t)\right) + 1.$$

Definimos el conjunto de valores de diferenciales asociado a $f$ como

$$\Lambda_f = \{\nu(w);\ w \in \mathcal{O}d\mathcal{O} \setminus \mathcal{T}\}.$$

Es sabido de que el conjunto $\Lambda_f$ es un invariante analítico, o sea, es un invariente de $f$ por $\mathcal{K}$-equivalencia .

El semigrupo $N_f$ asociado a una curva $f$ irreducible es un subconjunto de $\Lambda_f$, ya que $\nu(dh) = v(h)$ para todo $h \in \mathcal{O}$. Por lo tanto, el conjunto $\Lambda_f \setminus N_f$ es un invariante analítico. Así como el invariante de Zariski de $f$ definido por:

$$\lambda = \min\{i;\ i \in \Lambda_f,\ \ i \notin N_f\} - v_0,$$

donde $v_0 = \text{mín}\,(N_f \setminus \{0\})$.

Si $g$ y $f$ son irreducibles, equisingulares y tal de que $\Lambda_f = \Lambda_g$, entonces diremos que $f$ y $g$ son *equidiferenciables*, escribiendo $f \sim_{\mathcal{ED}} g$.

Por lo tanto por la existencia del conductor $c$ de $N_f$, tenemos que en la clase de equisingularidad de la curva irreducible $(f)$ existen finitas curvas $(g_1), \ldots, (g_r)$ tal que los conjuntos $\Lambda_{g_j}$ son dos a dos disjuntos y estratifican la clase de equisingularidad en una unión finita de conjuntos constructibles $E_j$, $j = 1, \ldots, r$, definidos como sigue:

$$E_j = \{g;\ g \equiv f,\ \text{e}\ \ \Lambda_g = \Lambda_{g_j}\},\ \ j \in \{1, \ldots, r\}.$$

las curvas pertenecientes a cada extrato $E_j$ poseen una forma normal en relación a la $\mathcal{K}$-equivalencia, que en términos de las paremetrizaciones de Puiseux se traduce en el siguiente Teorema. (cf. [HH1])

**Teorema 7.** Sea $f$ una curva irreducible con semigrupo $N_f = \langle v_0, \ldots, v_g\rangle$, entonces $f$ es analiticamente equivalente a una curva cuya parametrización es $(t^{v_0}, t^{v_1})$ o $(t^{v_0}, t^{v_1} + t^\lambda + \sum_{i>\lambda,\ i\notin\Lambda'} a_i t^i)$, onde $\Lambda' = \Lambda_f - v_0$.

Además, si $h \equiv f$, con $\Lambda_h = \Lambda_f$ y con parametrización $(t^{v_0}, t^{v_1} + t^\lambda + \sum_{i>\lambda,\ i\notin\Lambda'} b_i t^i)$, entonces $h \sim f$ si y sólo si, existe $\zeta \in \mathbb{C}^*$ tal que $\zeta^{\lambda - v_1} = 1$ *e* $a_i = \zeta^{i-v_1} b_i,\ \ \forall i$.

# Capítulo 2

# Polar de una curva de género uno

Como mencionamos en el capítulo anterior el tipo topológico de la polar no es constante en una clase equisingular, sin embargo está afirmación no es totalmente falsa, pues actualmente se tiene un resultado dedido a Casas Alvero que dice que *genéricamente la afirmación es cierta.*

Para el caso particular de curvas de género uno con semigrupo $N_f = \langle n, m\rangle$ Casas da una prueba bien técnica a partir de la parametrización de Puiseux de una curva general con semigrupo $\langle n, m\rangle$.

En este trabajo daremos una prueba particular del resultado de Casas para curvas de género uno, a partir de la ecuación implícita de una curva general con semigrupo $\langle n, m\rangle$. Usaremos para esto un resultado sobre el polígono de Newton asociado a un conjunto particular de puntos obtenidos apartir de la descomposición en fracciones parciales de $\frac{m}{n}$ resultado que aparece en el trabajo de Casas ([C1]), además usaremos un resultado debido a Oka sobre la topología de una curva no degenerada.

También mostraremos explicitamente un abierto en $K(n, m)$ donde la topología de la polar es determinada por la topología de la curva, como también daremos un algoritmo que determina la topología de la polar de una curva en $K(n, m)$ dada en forma paramétrica y con un orden de truncamiento dado. Acabaremos dando ejemplos de curvas en $K(n, m)$ que no son de tipo general.

## 2.1. Polar de una curva en $K(n,m)$.

La siguiente proposición describe el polígono de Newton de la polar genérica de una curva genérica en $K(n,m)$, para esto usaremos la notación dada en el Teorema(3).

**Proposición 2.** El polígono de Newton $PN$ de la polar genérica de una curva genérica en $K(n,m)$ tiene $[\frac{s+1}{2}]$ lados $l_j$, $j \in \{0,\cdots,[\frac{s-1}{2}]\}$.

El lado $l_j$ tiene inclinación geométrica $\frac{q_{2j+1}}{p_{2j+1}}$, caso $j < \frac{s-1}{2}$, o $\frac{q_s - q_{s-1}}{p_s - p_{s-1}}$, caso $j = \frac{s-1}{2}$.
Además para $j < \frac{s-1}{2}$ los puntos del polígono de Newton sobre el lado $l_j$ son:

$P_{q_{2j}+\alpha q_{2j+1}-1} = (m-p_{2j}, q_{2j-1}) + \alpha(-p_{2j+1}, q_{2j+1})$, donde $\alpha \in \{0,\cdots,h_{2j+2}\}$.
En el caso que $s$ sea impar sobre el lado $l_{\frac{s-1}{2}}$ están apenas los puntos $(m - p_{s-1}, q_{s-1}-1)$ y $(0, n-1)$.

**Prueba**. Consideremos la serie:

$$f = y^n - x^m + \sum_{in+jm>nm} a_{i,j} x^i y^j,$$

con coeficientes $a_{i,j}$ arbitrarios, entonces:

$$af_x + bf_y = -amx^{m-1} + \sum_{in+jm>mn} aia_{i,j}x^{i-1}y^j + bny^{n-1} + \sum_{in+jm>mn} bja_{i,j}x^i y^{j-1} \tag{2.1}$$

Si $(i_0, j_0)$ es un exponente de la ecuación (2.1), entonces:

$$i_0 n \geq m(n-1-j_0) \tag{2.2}$$

En efecto, supongamos que $i_0 n < m(n-1-j_0)$, entonces tendremos dos posibilidades conforme $(i_0, j_0)$ sea un exponente de $f_x$ o de $f_y$.

1. Se $(i_0, j_0) = (i, j-1)$, entonces $ni < m(n-j)$, de donde $ni + mj < nm$, lo que es absurdo.

2. Se $(i_0, j_0) = (i-1, j)$, entonces $n(i-1) < m(n-1-j)$, de donde $ni + mj < mn$, lo que es absurdo.

Por tanto de 2.2 y del hecho que $\text{mdc}\{n,m\} = 1$ tenemos de que para $j_0$ fijado el menor valor entero que $i_0$ puede asumir es $m - [\frac{(j_0+1)m}{n}]$.

Por otro lado podemos garantizar de que en la expresión (2.1) existe efectivamente un monomio $b_{i_0,j_0}x^{i_0}y^{j_0}$, com $i_0 = m - [\frac{(j_0+1)m}{n}]$, pues este término se obtine a partir de $f_y$, ya que si $(m - [\frac{(j_0+1)m}{n}], j_0) = (i, j-1)$ entonces $ni + jm = (m - [\frac{(j_0+1)m}{n}])n + m(j_0+1) > mn$.

Otros posibles puntos a tomar en cuenta son $(0, n-1)$ y $(m-1, 0)$, mas considerando $j_0 = 0$ tenemos el punto $(m-h, 0)$ con $h \geq 1$. Entonces tenemos de que el conjunto:

$$A = \big\{(0, n-1), (m - [\frac{(j+1)m}{n}], j); 0 \leq j < n-1\big\}$$

Determina el polígono de Newton de la polar genérica de la curva genérica en $K(n, m)$, luego el resultado se obtiene de el Teorema 3. $\square$

Retomando la descomposición en fracciones parciales de $\frac{m}{n}$, y las notaciones dadas en el Teorema 3; tenemos que para cada $0 \leq u \leq [\frac{s-1}{2}]$, vamos a considerar $v$ con $0 \leq v \leq h_{2u+2}$, de la Proposición (2) tenemos que el polígono de Newton de la polar de la curva genérica en $K(n, m)$ tiene lados $l_u$, con $0 \leq u \leq [\frac{s-1}{2}]$.
Sobre cada lado $l_u$ tenemos los puntos $P_{u,v} = (i_{u,v}, j_{u,v})$.

Definamos las siguientes funciones lineales en los coeficientes $a_{i,j}$ de los elementos de $K(n, m)$:

$$h_{(u,v)} = b(j_{u,v}+1)a_{i_{u,v},j_{u,v}+1} + a(i_{u,v}+1)a_{i_{u,v}+1,j_{u,v}},$$

donde $(a : b) \in \mathbb{P}^1$.

Para cada $u$, con $0 \leq u \leq [\frac{s-1}{2}]$, definamos el polinomio.

$$F_u(z) = \sum_{0 \leq v \leq h_{2u+2}} h_{(u,v)} z^{j_{u,h_{2u+2}} - j_{u,v}}.$$

y denotemos por $\triangle(F_u)$ su discriminante.

A partir de la notación dada mostraremos el siguiente Teorema.

**Proposición 3.** La polar genérica de una curva genérica en $K(n, m)$ es Newton no degenerada.

**Prueba**. De la Proposición (2), tenemos que el polígono de Newton de la polar genérica de la curva genérica en $K(n, m)$ tiene $[\frac{s+1}{2}]$ lados, donde el lado $l_j$ $(0 \leq j \leq [\frac{s-1}{2}])$ tiene inclinación $\frac{q_{2j+1}}{p_{2j+1}}$ y es determinado por los puntos

$(m-p_{2j}-\alpha p_{2j+1}, q_{2j-1}+\alpha q_{2j+1})$, donde $0 \leq \alpha \leq h_{2j+2}$ ; además en caso $s$ sea impar el lado $l_{\frac{s-1}{2}}$ es determinado apenas por los puntos $(m-p_{s-1}, q_{s-1}-1)$ y $(0, n-1)$.

Sea ahora $u, v$ con $0 \leq u \leq [\frac{s-1}{2}]$ y $0 \leq v \leq h_{2u+2}$.

A partir de los vértices del polígono de Newton $PN$, los cuales acabamos de describir definimos los términos $h_{(u,v)}x^u y^v$, los cuales representan los vértices del polígono $PN$, de la manera siguiente:

$$h_{(u,v)} = b(j_{u,v}+1)a_{i_{u,v},j_{u,v}+1} + a(i_{u,v}+1)a_{i_{u,v}+1,j_{u,v}},$$

Los $h_{(u,v)}$ están bien definidos pues de la prueba de la Proposición (2) vimos que el término correspondiente a $f_y$ determina un punto del polígono de Newton de la polar, por lo tanto el término $b(j_{u,v}+1)a_{i_{u,v},j_{u,v}+1}$ estará siempre presente en $h_{(u,v)}$. Así podemos definir el polinomio:

$$F_u(z) = \sum_{0 \leq v \leq h_{2u+2}} h_{(u,v)} z^{j_{u,h_{2u+2}}-j_{u,v}}.$$

$F_u$ representa el polinomio asociado al lado $l_u$ del polígono de Newton $PN$. Por tanto si consideramos:

$f \in K(n,m)$ tal que sus coeficientes no se anulan en el polinomio $\Pi_{u,v}h_{(u,v)}$, tendremos que la polar genérica de $f$ tiene polígono de Newton $PN$.
Si además consideramos $f$ tal que sus coeficientes no se anulan en el polinomio $\triangle(F_u)$, tendremos que su polar es Newton no degenerada. Así tenemos que para $f \in K(n,m)$ genérica su polar es no degenerada. □

**Definición 5.** Una curva $f \in K(n,m)$ cuya polar tiene polígono de Newton $PN$ y es Newton no degenerada es dicha una curva de tipo general en $K(n,m)$.

A partir de la prueba de la proposición (3) podemos describir explícitamente un abierto de Zariski $U \subset K(n,m)$, donde las curvas son de tipo general. Así tenemos.

**Corolario 2.** Un conjunto abierto $U \subset K(n,m)$, donde las curvas son de tipo general es dado por el complemento en $K(n,m)$ del cerrado de Zariski:

$$Z_1 = Z(\prod_{P_{u,v} \in PN} h_{(u,v)}) \bigcup (\bigcup_{0 \leq u \leq \left[\frac{s-1}{2}\right]} Z(\triangle(F_u)).$$

**Ejemplo 2.** Consideremos la curva $f = y^7 - x^{19} + \sum_{7i+19j>133} a_{i,j}x^iy^j$.

El polígono de Newton de $af_x + bf_y$ tiene dos lados $l_0$ y $l_1$ que pasamos a describir:

• El lado $l_0$ es determinado por los monomios $h_{0,0} = ba_{17,1}x^{17}$, $h_{0,1} = 2ba_{14,2}x^{14}y$, y $h_{0,2} = 3ba_{11,3}x^{11}y^2$.
De donde $F_0(z) = 3ba_{11,3}z^2 + 2ba_{14,2}z + ba_{17,1}$ y $\triangle(F_0) = 12b^3a_{11,3}(3a_{11,3}a_{17,1} - a_{14,2}^2)$.

• El lado $l_1$ es determinado por los monomios $h_{1,0} = 3ba_{11,3}x^{11}y^2$ y $h_{1,1} = 7by^6$.
De donde $F_1(z) = 7bz^4 + 3ba_{11,3}$ y $\triangle(F_1) = (84a_{11,3})^3$.

Por tanto:

$$U = K(7,19) - \left[Z(a_{11,3}a_{14,2}a_{17,1}) \cup Z(b^3(3a_{11,3}a_{17,1} - a_{14,2}^2))\right],$$

es un abierto donde las curvas son de tipo general.

En particular considerando $a_{11,3} = a_{14,2} = a_{17,1} = 1$, tenemos de que la curva:

$$f = y^7 - x^{19} + x^{11}y^3 + x^{14}y^2 + x^{17}y$$

es una curva de tipo general en $K(7,19)$.

## 2.2. Rutina Computacional

En esta sección presentamos una rutina *rpolar* implemetanda en Maple, que nos permite obtener datos relativos a la polar de una curva dada en $K(n,m)$.

La siguiente sub-rutina *impl*, será usada para la rutina principal *rpolar*. Ella determina la ecuación explicita de una curva irreducible, a partir de su ecuación paramétrica de Puiseux.

```
impl := proc(xt, yt)
local  i, n, rpu, f;
n := ldegree(xt);
rpu := cos(2 * Pi/n) + I * sin(2 * Pi/n);
f := 1;
for  i  from 0 to n − 1 do
```

$f := f * (y - subs(t = rpu^i * x^(1/n), yt));$
$od;$
$f := sort(collect(expand(f), y), [y, x], 'plex');$
$end :$

La rutina *rpolar*, determina a partir de una curva dada en su forma paramétrica de Puiseux $\big(x(t), y(t)\big)$, y de un determinado orden de truncamiento, la ecuación de su polar, las parametrizaciones de las componentes irreducibles de la polar y sus índices de intersección.

$rpolar := proc(xt, yt, n)$
$local\ f, P, R, i, nR, j, Cx, Cy, H, grauCx;$
$f := impl(xt, yt);$
$P := simplify(expand(a * diff(f, x) + b * diff(f, y)));$
$with(algcurves) :$
$R := puiseux(P, x = 0, y, n, t);$
$nR := nops(R);$
$print$(ramos da polar);
$for\ i\ from\ 1\ to\ nR\ do$
$print(ramo = i);$
$print(parametrizacao = R[i]);$
$Cx[i] := convert(R[i][1], list);$
$Cy[i] := convert(R[i][2], list);$
$grauCx := degree(Cx[i][2], t);$
$if\ Cx[i][2] <> t^{grauCx}\ then$
$Cx[i][2] := subs(t = (coeff(Cx[i][2], t, grauCx))^{(1/grauCx)} * t, Cx[i][2]);$
$Cy[i][2] := subs(t = (coeff(Cx[i][2], t, grauCx))^{(1/grauCx)} * t, Cx[i][2]);$
$fi;$
$f[i] := impl(Cx[i][2], Cy[i][2]);$
$print$(equacao implicita $= f[i]$);
$print(oooooooooooooooooooooooooooooooooooooooooo);$
$od;$
$print$(multiplicidade de intersecao);
$for\ i\ from\ 1\ to\ nR - 1\ do$
$for\ j\ from\ i + 1\ to\ nR\ do$
$H[i, j] := ldegree(simplify(expand(subs(x = Cx[i][2], y = Cy[i][2], f[j]))), t);$
$print((r[i], r[j]) = H[i, j]);$

*od*;
*od*;
*end* :

## 2.3. Curvas de tipo especial en $K(n, m)$.

De la Proposición (3) tenemos de que la polar de una curva de tipo general en $K(n, m)$ es Newton no degenerada, en particular sus componentes irreducibles son suaves o de género uno. Una pregunta natural es que si cualquier curva en $K(n, m)$ tiene su polar con componentes irreducibles de género menor o igual a uno.

A primera vista la respuesta parece afirmativa. No obstante mostraremos enseguida con un ejemplo dado en el conjunto $Z_1$ que esto es sorprendentemente falso.

**Ejemplo 3.** Consideremos la curva

$$f = y^5 - \frac{10}{3}x^5y^3 + 5x^8y^2 + 5x^{10}y + 5x^{12} \in K(5, 12),$$

cuya polar genérica es dada por :

$$\begin{aligned} af_x + bf_y &= 5by^4 - \tfrac{50}{3}ax^4y^3 + (40ax^7 - 10bx^5)y^2 + (50ax^9 + 10bx^8)y \\ &\quad +60ax^{11} + 5bx^{10}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Vamos ahora a determinar las ramas (componentes irreducibles) de $P(f) = af_x + bf_y$. El polinomio asociado al único lado del polígono de Newton de $P(f)$ es:

$$F(z) = 5bz^4 - 10bz^2 + 5b.$$

Sea $a_1$ uma raíz de $F(z)$. Ejecutemos ahora el algoritmo de Newton dado en el Apéndice para determinar una solución de $P(f) = 0$ como serie de potencias fraccionarias en $x$ . Hacemos los siguientes cambios de variables:

$$x = x_1^2, \qquad y = x_1^5(a_1 + y_1).$$

sustituyendo en (2.3), tenemos que

$$5bx_1^{20}(a_1+y_1)^4 - \tfrac{50a}{3}x_1^8x_1^{15}(a_1+y_1)^3 + (40ax_1^{14} - 10bx_1^{10})x_1^{10}(a_1+y_1)^2 +$$
$$(5ax_1^{18}10bx_1^{16})x_1^5(a_1+y_1) + 60ax_1^{22} + 5bx_1^{20} =$$

$$x_1^{20}\{5ba_1^4 + 20ba_1^3y + 30ba_1^2y_1^2 + 20ba_1y_1^3 + 5by^4 - \tfrac{50a}{3}x_1^3(a_1+y_1)^3 +$$
$$(40ax_1^4 - 10b)(a_1+y_1)^2 + (5ax_1^3 + 10bx_1)(a_1+y_1) + 60ax_1^2 + 5b\} =$$

$$x_1^{20}f_1(x_1,y_1).$$

Ahora como $F(a_1) = 0$, entonces tenemos de que:

$$\begin{aligned} f_1 \;=\; & (30ba_1^2 10b)y_1^2 + 20ba_1y_1^3 + 5by_1^4 - \tfrac{50}{3}x_1^3(a_1+y_1)^3 + 40ax_1^4(a_1+y_1)^4 \\ & +5aa_1x_1^3 + 5ax_1y_1 + 10ba_1x_1 + 10x_1y_1 + 60ax_1^2. \end{aligned}$$

El polígono de Newton de $f_1$ tiene un sólo lado con polinomio asociado

$F_1(z) = 10b(3a_1^3 - 1)z^2 + 10ba_1$. Sea ahora $a_2$ una raíz de $F_1$, luego a partir del cambio de variables

$$x_1 = x_2^2\,, \qquad y_1 = x_2(a_2 + y_2)$$

tenemos de que

$$y = a_1x^{\frac{5}{2}} + a_2x^{\frac{11}{4}} + \cdots .$$

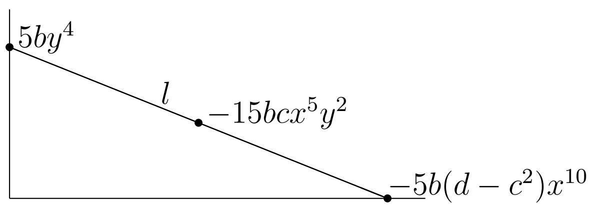
Ahora como $o(af_x + bf_y) = 4$, entonces tenemos de que la polar tiene apenas una componente irreducible con parametrización de Puiseux de la forma:

$$x = t^4, \quad y = a_1t^{10} + a_2t^{11} + \cdots .$$

Luego la polar de $f$ es una curva irreducible de género dos.

Veremos ahora una familia de curvas en $K(5,12)$, cuyas polares son curvas irreducibles de género 2, y a la cual pertenece la curva del Ejemplo 3.

**Ejemplo 4.** Consideremos la familia de curvas con semigrupo asociado $\langle 5, 12\rangle$ parametrizadas por $\varphi = (t^5, t^{12} + ct^{13} + dt^{14} + et^{16})$ y sea $(f)$ la curva asociada a $\varphi$ obtenida a partir de el Teorema (1). Un cálculo muestra de que el polígono de Newton de $af_x + bf_y$ tiene un sólo lado $l$



Así el polígono de Newton asociado a $l$ es

$$F(z) = 5bz^4 - 15bcz^2 - 5b(d - c^2).$$

Al determinar el discriminante de $F$, vemos de que existe una constante no nula $\rho$, tal que

$$\triangle(F(z)) = \rho(c^2 - d)(5c^2 + 4d)^2.$$

Por lo tanto, considerenado $c = \frac{2}{3}$ e $d = \frac{-5}{9}$, obtenemos la familia $\varphi_e = t^{12} + \frac{2}{3}t^{13} - \frac{5}{9}t^{14} + et^{16}$, cuyos miembros poseen polares irreducibles de género 2.

En efecto , sea $f_e$ la ecuación de la curva obtenida a partir del Teorema (1) y la parametrización $\varphi_e$.

Usando el programa *rpolar*, se puede mostrar de que la parametrización de Puiseux de $a(f_e)_x + b(f_e)_y$ es dada por:

$$x = t^4, \qquad y = q_1(e)t^{10} + q_2(e)t^{11} + \cdots,$$

donde los $q_i(e)$ son polinômios en $e$. Así un término general de la familia de curvas parametrizadas por $x = t^5$, $\varphi_e = t^{12} + \frac{2}{3}t^{13} - \frac{5}{9}t^{14} + et^{16}$ tiene polar genérica irreducible, cuya singularidad es determinada por los exponentes característicos 4, 10 e 11 o equivalentemente por el semigrupo $\langle 4, 10, 21 \rangle$.

**Observación 6.** El ejemplo anterior muestra de que la equivalencia analítica de curvas no es una condición necesaria para que las polares sean equisingulares, pues las curvas correspondientes a las parametrizaciones $\varphi_e$, a partir del Teorema (7), se deduce que son dos a dos no equivalentes, sin embargo sus polares correspondientes son equisingulares.

# Apéndice A

# Algoritmo de Newton-Puiseux

**Definición 6.** Sea $y(t) = \sum c_u x^u$ una serie de potencias con exponentes fraccionarios. El orden de $y$ es definido como :

$$v(y) = \text{ínf}\{u; c_u \neq 0\}$$

Si $v(y)$ es un número racional y $c_{v(y)} \neq 0$, diremos de que $In(y) = c_{v(y)}x^{v(y)}$ es el primer término de $y$.

Definimos de manera inductiva el $n-$ésimo término de $y$ como el $(n-1)$-ésimo término de $y - In(y)$.

**Observación 7.** Una serie con primer y segundo término puede escribirse como: $y = In(y) + (y - In(y)) = In(y) + \overline{y}$, donde $o(\overline{y}) > o(y)$.

Supongamos que $y(x)$ es una solución de la ecuación $f(x, y) = 0$. Supongamos de que $c_0 x^{u_o}$ es el primer término de $y$ y supongamos también que tiene segundo término.

Sea $\overline{y} = y - In(y)$ y sea $f(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$. De donde se tiene de que: $0 = f(x, c_0 x^{u_0} + \overline{y}) = \sum a_{i,j} x^i (c_0 x^{u_0} + \overline{y})^j = \sum_{i,j} \sum_{k=0}^{j} C_k^j c_0^k x^{i+ku_o} \overline{y}^{j-k}$.

Como $v(\overline{y}) > u_0$ se tiene de que $v(x^{i+ku_o}\overline{y}^{j-k}) \geq i + ju_0$ siendo la desigualdad estricta si y sólo si $k \neq j$. Por tanto:

$$0 = f(x, c_0 x^{u_0} + \overline{y}) = \sum_{i,j} a_{i,j} c_0^j x^{i+ju_0} + \tilde{y}_{i,j}$$

donde $v(\tilde{y}) > i + u_0 j$ para todo $(i, j)$.

Sea $m = \min\{i + u_0 j; a_{i,j} \neq 0\}$. Como los términos del mismo orden deben cancelarse se tiene que:

$0 = \sum_{i+ju_0=m} a_{i,j}c_0^j x^{i+ju_0} = x^m \sum_{i+ju_0=m} a_{i,j}c_0^j$. Donde $c_0$ es raíz del polinomio :

$$\phi(c) = \sum_{i+ju_0=m} a_{i,j}c^j$$

este polinomio tiene raices no nulas si tiene mas de un término

**Definición 7.** *Sea $f = \sum a_{i,j}x^i y^j$ una serie de potencias el conjunto de exponentes de $f$, es llamado el soporte de $f$, y es el subconjunto discreto del plano real:*

$$S(f) = \{(i,j); a_{i,j} \neq 0\}$$

.

**Observación 8.** *Si el conjunto de exponentes de $f$ está contenido en una recta de pendiente $\frac{-1}{u}$, es decir $i + ju = m$ para todo $(i,j) \in S(f)$ y $c$ es una raíz del polinomio $\phi(c) = \sum_{(i,j)\in S(f)} a_{i,j}x^i c^j x^{uj} = x^m \sum_{(i,j)\in S(f)} a_{i,j}c^j = 0$ Además se observa de que:*

- *Como $f(0,0) = 0$, el punto $(0,0)$ no está en el conjunto de exponentes de $f$.*
- *Si el conjunto de exponentes no tiene ningún punto en el eje de las $x$ entonces $y$ divide $f$.*
- *Si el conjunto de exponentes no tiene ningún punto en el eje de las $y$, entonces $x$ divide $f$.*
- *$f$ es un polinomio si es conjunto de exponentes es acotado.*

**Definición 8.** *Sea $L$ un lado del polígono de Newton de $f$, el polinomio asociado a $L$ es $f_L = \sum_{(i,j)\in L\cap S(f)} a_{i,j}x^i y^j$. Las $y-$ raízes de los polinomios asociados a los lados del polígono de Newton son monomios de la forma $cx^u$ donde $\frac{-1}{u}$, es la pendiente de la recta que contiene a $L$ y $c$ es una raíz del polinomio $\phi(z) = f_L(1,z)$*

Así si $c_0 x^{u_0}$ es el primer término de una solución de la ecuación $f(x,y) = 0$, entonces:
•$\frac{-1}{u_0}$ es la pendiente de la recta que contiene a un lado $L$ del polígono de Newton de $f$.
•$c_0$ es una raíz distinta de cero del polinomio $f_L(1,z)$.

El siguiente método fue explicado por Newton en 1676 en una carta a Oldenburg .[N].

# MÉTODO DE NEWTON

Dada $f$ analítica. Sea $f_1 = f$, y $N$ es número de términos que queremos calcular, sea $\mu_0 = -1$, y $sol = 0$. desde $i = 1$ hasta $i = N$.

Si $f_i(x, y) = 0$ devolver:
sol es una solución de $f = 0$ con $i$ términos
Si $f_i(x, y) \neq 0$ hacer:

1. Elegir un lado $L_i$ del polígono de Newton de $f_i$ con la propiedad de que:
$$\frac{-1}{\text{Pendiente de} L_i} > \mu_{i-1}$$
2. Elegir una raíz distinta de cero del polinomio $f_{L_i}(1, z)$.
3. Hacer:
$\mu_i = \frac{-1}{\text{pendiente de } L_i}$,
sol = sol + $c_i x^{u_i}$,
$f_{i+1} = f_i(x, y + c_i x^{u_i})$.

Para garantizar de que el método funcione falta probar de que :

• El paso, de poder elegir un lado $L_i$ del polígono de Newton de $f_i$ con la propiedad de que
$$\frac{-1}{\text{Pendiente de} L_i} > \mu_{i-1}$$
, siempre puede realizarse.

• $f(x, y(x)) = 0$, es decir que $\lim_{n\to\infty} o(f(x, \sum_{i=1}^{N} c_i x^{u_i} = \infty$. Este punto se prueba mostrando que los denominadores de los exponentes $\mu_i$ no crecen indefinidamente.

• Haciendo $N = \infty$ la serie
$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^{\mu_i}$$
converge en una vecindad del origen.

La prueba de estas afirmaciones puede encontrarse en [BK].

# Bibliografía

[BK] E. Brieskorn and H. Knorrer.-*Plane algebraic curves* Birkhauser verlang, Basel, 1986.

[C1] Casas-Alvero, E. - *On the singularities of polar curves.* Manuscripta Math. **43** (1983), 167-190.

[C2] Casas-Alvero, E. - *Singularities of plane curves.* London Mathematical Society, Lectures Notes Series 276 (2000).

[BLP] García-Barroso, E.; Lenarcik, A.; Ploski, A. - *Characterization of non-degenerate plane curve singularities.* Proc. of the Effective Methods in Algebraic and Analytic Geometry. Effect 2006. Univ. Iagell. Acta Math. Fasc. XLV (2007), 27-36.

[H] Hefez, A. - *Irreducible Plane Curves Singularities, Real and Complex Singularities.* Lectures Notes in Pure and Appl, Math. 232 (2003).

[HH1] Hefez, A.; Hernandes, M.E. - *The Analytic Classification of Plane Branches.* Bull. London Math. Soc. **43** (2011), 289-298.

[L] Lê, D. T. - *Topological use of polar curves.* Proc. Symp. pure Math. Vol 29. (1975), 507-512.

[M] Merle, M. - *Invariants Polaires des Courbes Planes.* Inventiones Mathematicae, **41** (1977), 103-111.

[N] I. Newton- the correspondence of Isaak Newton, vol2, chapter(1676-1687). Cambridge University Press, 1960. Cartas del 13 de junio al 24 de octubre de 1976.

[O] Oka, M. - *Non-degenerate complete intersection singularity.* Hermann 1997

[Z1] ZARISKI, O. - *The moduli problem for plane branches*. University lecture series AMS, Volume 39 (2006).